المحاضرة الرابعة

٤. خصائص المقدر الجيد

لقد تعرضنا في الموضوع السابق لطريقة المربعات الصغرى والتي تمكننا من قياس القيم المقدرة لمعالم النموذج الخطي البسيط من خلال بيانات العينة. وتهدف هذه الطريقة الى الحصول على المقدرات التي تجعل من مجموع مربعات البواقي أصغر ما يمكن، وللوصول الى هذا الهدف لا بد من توافر خصائص معينة لتلك المقدرات ويطلق عليها خصائص المقدر الجيد وهي:

- الخطية
- عدم التحيز
- الكفاءة
- الاتساق

وقبل ان نتعرض لخصائص المقدر الجيد سوف نقوم أولا بهذه التحويلات والتي سوف تساعدنا وتسهل علينا الكثير من الاثباتات القادمة.

يمكن كتابة $b=\frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$ والتي تمثل تقدير معلمة الميل الحدي باستخدام طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية بالصيغة التالية:

$$b=\sum \frac{x_i}{\sum x_i^2} y_i = \sum w_i y_i$$

بحيث ان:

$$W = \frac{x_i}{\sum x_i^2}$$

وان قيم x،y مقاسة بالانحرافات حول المتوسط.

علما ان w_i تمتلك الخصائص التالية:

1. $\sum w_i = 0$
2. $\sum w_i^2 = \frac{1}{\sum x_i^2}$
3. $\sum w_i x_i = 1$

والان سوف ننتقل لاستعراض خصائص المقدر الجيد وهي:

1.4 الخطية Linearity

يعتبر المقدر خطي إذا كان يظهر كدالة خطية في القيم المشاهدة للمتغير التابع. ويمكن اثبات توافر هذه الخاصية في مقدرات المربعات الصغرى رياضيا كالتالي:

1.4.4 بالنسبة للمقدر $b^\wedge$

$$b^\wedge=\sum w_i y_i$$

وبما ان:

$$y = Y - \bar{Y}$$

لذلك فان:

$$b^{\wedge} = \sum w_i (Y - \bar{Y}) = \sum w_i * Y - \sum w_i * \bar{Y} = \sum w_i * Y$$

إذا فان b مقدر خطي في القيم المشاهدة للمتغير التابع Y باعتبارها دالة في المتغير التابع Y.

2.4.4 بالنسبة للمقدر $a^{\wedge}$

بما ان:

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}$$

إذا يكون:

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum Y_i}{n} - \bar{X} \sum w_i Y_i$$

وبأخذ Y_i عامل مشترك:

$$\hat{\alpha} = \sum (\frac{1}{n} - \bar{X} w_i) Y_i$$

اذا فان $\hat{\alpha}$ مقدر خطي في القيم المشاهدة للمتغير التابع Y

2.4 عدم التحيز Unbiasedness

ان مقدرات المربعات الصغرى الاعتيادية لكل من α، β غير متحيزة. وهذا يعني ان الفرق بين القيمة المتوقعة للمقدر والقيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع الاصلية مساويا للصفر. أي بمعنى اخر:

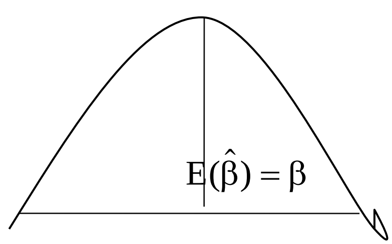
$$E(\hat{\alpha}) = \alpha$$

$$E(\hat{\beta}) = \beta$$

فاذا جمعت عينات كثيرة وفي كل عينه نحسب $\hat{\alpha}$ ومن ثم يتم أخذ المتوسط، ذلك المتوسط نظريا يجب أن يتساوى مع المعلمة الحقيقية.

ان هذه الأوضاع كلها نظريه بحتة، في الواقع لا يكون عندنا عدد من العينات اذ غالبا ما يتوفر عينه واحدة فقط وتعطينا قيمه واحدة $\hat{\alpha}$، وقيمه واحدة $\hat{\beta}$ يعتمد عليها في التحليل، من الناحية النظرية نقول أن هذه المقدرات يتوقع أنها تســاوي القيمة الحقيقية ومن الناحية الأخرى ان القيمة الحقيقة لا نعرفها وبالتالي فان هذه الخصائص خصائص نظريه بحتة.

ولتوضيح خاصية عدم التحيز بيانيا يتم رسم دالة احتمال $\hat{\beta}$ ، ان خاصية عدم التحيز تقول أن توزيع احتمال $\hat{\beta}$ يأخذ الشكل ( )



يتمركز حول القيمة الحقيقية لـ β وهذا يعني أن القيمة المتوقعة لـ $\hat{\beta}$ تســاوي β $E(\hat{\beta}) = \beta$ وأن قيمة β تساوي المعلمة الحقيقية ونفس التحليل ينطبق على α

ولإثبات ان مقدرات المربعات الصغرى الاعتيادية تكون غير متحيزة نظريا يكون ذلك كما يلي:

- **بالنسبة للمقدرة $b^\wedge$**

بما ان:

$$b^\wedge = \sum w_i y_i$$

لذلك فان:

$$b^\wedge = \sum w_i (\alpha + \beta X + U) = b + \sum w_i U$$

بحيث ان:

$$\sum w_i = 0$$
$$\sum w_i x_i = 1$$

وبأخذ القيمة المتوقعة للطرفين:

$$E\ b^\wedge = b + \sum w_i EU$$

حيث ان:

$$EU=0$$

لذلك فان:

$$E\ b^\wedge = b$$

ومعنى ذلك ان تقديرات المربعات الصغرى الاعتيادية لمعلمة الميل الحدي هي تقديرات غير متحيزة.

- **بالنسبة للمقدرة $\alpha^\wedge$**

بما ان:

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}$$

لذلك فان:

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum y}{n} - \bar{X}\sum wY = \sum(\frac{1}{n} - \bar{X}w)Y = \sum(\frac{1}{n} - \bar{X}w)(\alpha + \beta X + U)$$

وبضرب الاقواس معا واخذ الخطأ العشوائي عامل مشترك ينتج ان:

$$\hat{\alpha} = \alpha + \sum(\frac{1}{n} - \bar{X}w) * U$$

وبأخذ القيمة المتوقعة للطرفين نحصل على:

$$E\hat{\alpha} = \alpha$$

لذلك فان تقديرات المربعات الصغرى الاعتيادية بالنسبة لمعلمة القاطع هي تقديرات غير متحيزة.

ويتعين إيجاد صيغ تباينات وتغايرات المعالم المقدرة قبل الدخول في باقي خصائص مقدرات المربعات الصغرى، نظرا لأهمية تلك المؤشرات الإحصائية في الاثباتات الخاصة بخاصيتي الاتساق والكفاءة وهي كما يلي: